JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **41**, 8–36 (1981)

Régularité des lois conditionnelles en théorie du filtrage non-linéaire et calcul des variations stochastique

DOMINIQUE MICHEL

19 rue des Quatre Vents, Garches, France

Communicated by P. Malliavin

Received March 1980; revised June 1980

INTRODUCTION

L'objet de ce travail est l'étude des lois conditionnelles intervenant en théorie du filtrage. Dans [3], Liptser et Shiryayev font un exposé détaillé des résultats obtenus sur ce problème avant 1972. Il montre, en particulier, que si (θ_t, ξ_t) est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ et h_t une fonctionnelle mesurable de (θ_t, ξ_t) vérifiant certaines conditions, l'espérance conditionnelle $E(h_t \mid \mathscr{F}_t^\xi)$, où $\mathscr{F}_t^\xi$ est la tribu engendrée par $\{\xi_s, s \leqslant t\}$, est solution d'une équation différentielle stochastique appelée équation de filtrage. Cette équation présente l'inconvénient de ne pas être fermée, au sens où elle fait intervenir l'espérance conditionnelle de quantités autres que h_t. Par contre, si la probabilité conditionnelle $P(\theta_t \geqslant x \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, celle-ci vérifie une équation stochastique aux dérivées partielles fermée.

Krylov et Rozovskii ont démontré, dans [2], que, si (θ_t, ξ_t) est un processus de diffusion sur $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ vérifiant certaines hypothèses, la loi conditionnelle admet une densité de classe $\mathscr{C}^k$. Leur méthode consiste à démontrer l'existence d'une solution faible pour une équation aux dérivées partielles stochastique d'un type déjà considéré par Pardoux [8], puis à obtenir des résultats de régularité pour cette solution.

Pardoux, dans [10, 11], effectue en quelque sorte la démarche inverse. Il résoud l'équation de filtrage considérée à priori et il montre à l'aide d'une formule de Feynman–Kac que la solution de cette équation est la densité conditionnelle du filtrage.

On obtient ici des résultats de régularité pour la loi conditionnelle relative à un couple de processus (θ_t, ξ_t), solution d'un système différentiel stochastique dont les coefficients peuvent dépendre de tout le passé de ξ. La

0022-1236/81/040008-29$02.00/0

méthode est totalement différente de celle utilisée dans [2]. Elle permet en particulier de choisir pour loi conditionnelle initiale une mesure quelconque.

On suit, tout d'abord, la même méthode que Liptser et Shiryayev dans leur démonstration concernant le cas gaussien: elle consiste à réaliser θ_t comme une fonctionnelle de (w, ξ) où w est un processus de Wiener de même dimension que θ, puis, en utilisant la formule de Bayes généralisée a écrire l'espérance conditionnelle $E(h(t, \theta_t, \xi_t)|\mathscr{F}_t^\xi)$ comme une intégrale sur l'espace de probabilité du brownien sur $\mathbb{R}^m$ $(m = \dim \theta)$. Ceci fera l'objet du chapitre 2. Ces résultats permettent d'appliquer, dans le chapitre 3, la méthode que Paul Malliavin a utilisé dans [5, 6, 7] pour démontrer l'absolue continuité des lois d'un processus de diffusion. On rappellera les grandes lignes de cette méthode, dans le chapitre 1, en utilisant très largement l'article de Stroock [9] sur le travail de P. Malliavin.

Je tiens à adresser tous mes remerciements à M. Paul Malliavin pour les nombreuses discussions que j'ai eues avec lui et pour les encouragements qu'il m'a prodigués tout au long de ce travail.

0. Préliminaires

0.1. *Notations*

0.1.1. $\mathscr{C}(R^p)$ est l'espace des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^p$; on note c l'élément générique de $\mathscr{C}(\mathbb{R}^p)$; $\mathscr{N}_p$ est la tribu borélienne sur cet espace; $\mathscr{N}_{p,t}$ est la sous-tribu de $\mathscr{N}_p$ engendrée par les fonctions $\{c(s),\ s \leqslant t,\ c \in \mathscr{C}(R^p)\}$.

0.1.2. $\mathscr{C}_0(R^p)$ est le sous-espace de $\mathscr{C}(R^p)$ formé des fonctions nulles en 0; on note w l'élément générique de $\mathscr{C}_0(R^p)$; $\mathscr{B}_p$ est la tribu borélienne; $\mathscr{B}_{p,t}$ la sous-tribu engendrée par $\{w(s),\ s \leqslant t,\ w \in \mathscr{C}_0(R^p)\}$.

0.1.3. $\mathscr{C}_b^k(R^n)$ est l'espace des fonctions bornées de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^k$ et dont les dérivées jusqu'à l'ordre k sont bornées.

0.2. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ un espace de probabilité muni d'une famille croissante de tribus $\{\mathscr{F}_t\}$ inclues dans $\mathscr{F}$ et soient $(W_1, ..., W_n)$, $n = m + p$ processus de Wiener indépendants sur cet espace, adaptés à la famille $\{\mathscr{F}_t\}$. Soient a, b, A, B des matrices réelles définies sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathscr{C}(\mathbb{R}^p)$ de dimensions respectives $m \times 1$, $m \times n$, $p \times 1$, et $p \times n$ telles que, si l'on note f l'un quelconque des éléments de l'une de ces matrices, on ait:

(H_0) $f(t, x, c)$ est $\mathscr{N}_{m,t}$-mesurable en tant que fonction définie sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^p)$, pour tout couple (t, x).

(H_1) Il existe une fonction croissante K, $0 < K < 1$ et des constantes L_1 et L_2 telles que:

(i) $|f(t,x,c)-f(t,x',c')|\leqslant L_1(\int_0^t \; |c_s-c'_s|^2 \; dK(s))+L_2(|x-x'|^2+|c_t-c'_t|^2)$,

(ii) $f^2(t,x,c)\leqslant L_1(\int_0^t (1+|c_s|^2)\, dK(s)+L_2(1+|x|^2+|c_t|^2)$.

(H_2) La matrice BB^* est inversible et il existe des constants C et C' telles que:

(a) $(BB^*\, Z,\, Z)\geqslant C\,|Z|^2$, $\forall Z\in\mathbb{R}^p$.

(b) $(b(I_n-B^*(BB^*)^{-1}B)b^*Z,\, Z)\geqslant C\,|Z|^2$, $\forall Z\in\mathbb{R}^m$.

(c) Les coefficients des matrices b, B, A sont bornés par C'.

On note (θ_t, ξ_t) la solution du système stochastique, pour $t\leqslant T$, T fixé:

$$d\theta_t = a(t,\theta_t,\xi)\,dt + b(t,\theta_t,\xi)\,dW_t,$$

$$d\xi_t = A(t,\theta_t,\xi)\,dt + B(t,\xi)\,dW_t,$$

θ_0 et ξ_0 sont supposés dans $L^2(\Omega)$.

Une telle solution existe de façon unique grâce à (H_1) et on a: $E(\sup_{0<t<T}(|\theta_t|^2+|\xi_t|^2))<+\infty$ (cf. par ex. [3, Chap. 4]).

0.3. On cherche une décomposition de $d\theta_t$ sous la forme: $d\theta_t = \tilde{a}dt + Dd\xi + FdW$ où

$$(d\xi)_i(FdW)_j = 0 \qquad \forall i=1 \text{ à } p \text{ et } j=1 \text{ à } m.$$

Ceci est à rapprocher de la méthode utilisée dans [7] où l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)$ est localement réalisé comme la somme directe de l'espace tangent à $\mathscr{H}_\xi = \{\omega, \xi(\omega)=\xi\}$ et de son orthogonal.

La condition $(d\xi)_i\; (FdW)_j=0$ est équivalente à: $b=DB+F$ et $FB^*=0$, d'où l'on déduit: $D=bB^*(BB^*)^{-1}$; $F=b(I_n-B^*(BB^*)^{-1}B)$. Il est clair qu'il existe des processus de Wiener indépendants $\mathscr{F}_t$-adaptés $\tilde{W}_1,\dots, \tilde{W}_n$ tels que:

$$\int_0^t (BB^*)^{-1/2}BdW_s = \tilde{W}_t^2; \qquad \int_0^t (FF^*)^{-1/2}FdW_s = \tilde{W}_t^1$$

où $\tilde{W}^2=(\tilde{W}_1 \cdots \tilde{W}_p)$ et $\tilde{W}^1=(\tilde{W}_{p+1}\cdots \tilde{W}_n)$, FF^* étant inversible d'après la condition (H_2, b). En conclusion:

$$d\theta_t = (a-bB^*(BB^*)^{-1}A)\,dt + bB^*(BB^*)^{-1}\,d\xi_t$$
$$+ [b(I_n-B^*(BB^*)^{-1}B)b^*]^{1/2}\,d\tilde{W}_t^1.$$
$$d\xi_t = (BB^*)^{1/2}(t,\xi)\,d\tilde{W}_t^2 + A(t,\theta_t,\xi)\,dt.$$

On notera

$$\tilde{b}_2 = bB^*(BB^*)^{-1},$$
$$\tilde{b}_1 = [b(I - B^*(BB^*)^{-1}B)b^*]^{1/2},$$
$$\tilde{a} = a - bB^*(BB^*)^{-1}A.$$

0.4. Remarquons que les coefficients de $\tilde{b}_2$, $\tilde{b}_1$, $bB^*(BB^*)^{-1}A$ sont bornés, grâce aux conditions (H_2, a et c). On notera M un de leurs majorants. Il est aisé de voir également que $\tilde{b}_2$ et $\tilde{a}$ vérifient une condition du type de $(H_1)_i$. Montrons qu'il en est de même pour $\tilde{b}_1$. Soient (x, c) et (x', c') deux éléments de $\mathbb{R}^m \times \mathscr{C}(\mathbb{R}^p)$. Notons D et S la différence et la somme des matrices $\tilde{b}_1(t, x, c)$ et $\tilde{b}_1(t, x', c')$. D est symétrique et donc diagonalisable. Soit $\{v_1 \cdots v_m\}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^m$ formée de vecteurs propres de D associés aux valeurs propres $\{\lambda_1 \cdots \lambda_m\}$. Alors les $\{S^{-1} \cdot v_i\}_{i=1 \text{ à } m}$ sont des vecteurs propres de la matrice $S^{-1}DS$ associés aux mêmes valeurs propres. Notons que S est inversible car $\tilde{b}_1$ est définie positive. On a l'égalité:

$$D + S^{-1}DS = 2S^{-1}(\tilde{b}_1^2(t, x. c) - \tilde{b}_1^2(t, x', c')).$$

D'où, pour tout i et tout $\eta \in \mathbb{R}^m$:

$$\lambda_i(v_i, \eta) + \sum_j \lambda_j(Sv_i, v_j)(S^{-1}v_j, \eta)$$
$$= 2(S^{-1}(\tilde{b}_1^2(t, x, c) - \tilde{b}_1^2(t, x', c'))v_i, \eta).$$

Prenons $\eta = Sv_i$. On obtient:

$$\lambda_i(v_i, Sv_i) = ((\tilde{b}_1^2(t, x, c) - \tilde{b}_1^2(t, x', c'))v_i, v_i)$$

et on a: $(v_i, Sv_i) \geqslant 2\sqrt{C}$. $\tilde{b}_1^2$ vérifiant une condition du type $(H_1)_1$, il en est donc de même pour $\tilde{b}_1$. On notera L'_1 et L'_2 des constantes telles que l'un quelconque des coefficients des matrices $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, $\tilde{a}$ vérifie:

$$|f(t, x, c) - f(t, x', c')|^2$$
$$\leqslant L'_1\left(\int_0^t |c_s - c'_s|^2 \, dK(s)) + L'_2(|x - x'|^2 + |c_t - c'_t|^2\right).$$

1. Introduction au calcul des variations stochastique

On se propose dans ce paragraphe d'exposer les grandes lignes de la méthode développée dans [5, 6] pour obtenir des résultats de régularité des lois de processus de diffusion.

On énoncera souvent les résultats dans l'interprétation qu'en a donnée Stroock dans [9] (cf. également [1] pour une formulation en termes d'analyse fonctionnelle). Le point de départ de la méthode est le lemme suivant:

1.1. LEMME. *Soit μ une mesure de Radon finie sur $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe une constante $C_0 > 0$ et un entier non nul N tels que*:

$$\left|\int D^\alpha \varphi(x)\,\mu(dx)\right| \leqslant C_0 \,\|\varphi\|_\infty, \qquad \forall \varphi \in \mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n), \forall \alpha, |\alpha| \leqslant N.$$

Alors μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Soit f la densité: si $N > n, f \in \mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^n)$ où $k = N - n - 1$ et $\|f\|_{\mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_0 A(n, N)$ *où $A(n, N)$ ne dépend que de n et de N.*

1.2. Soit $(t, w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m) \to g_t(w) \in \mathbb{R}^n$, $m \leqslant n$, un processus de diffusion et $\mu = (g_t)_*(\mu_m)$. Soit $\varphi \in \mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(x)\,\mu(dx) = \int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(g_t(w))\,\mu_m(dw).$$

L'idée est d'établir une notion de dérivation sur l'espace $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)$ qui permettrait d'exprimer $\partial\varphi/\partial x_k(g_t(\omega))$ à l'aide d'une "dérivée" de la fonction $\tilde{\varphi}_t = \varphi \circ g_t$ et d'effectuer une intégration par parties sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)$ par rapport à la mesure de Wiener.

1.3. *L'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck*

C'est un opérateur sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)$ qui généralise l'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck sur $\mathbb{R}^p$ au sens où il est auto-adjoint par rapport à la mesure de Wiener.

1.3.1. DÉFINITIONS. Soit $\{\mathscr{C}_0^2(\mathbb{R}^m), \mathscr{B}_m^2, \mathscr{B}_{m,t}^2, \mu_m^2\}$ l'espace de Wiener des fonctions continues de $(\mathbb{R}^+)^2$ dans $\mathbb{R}^m$ nulles sur les axes de coordonnées. $\mathscr{B}_m^2$ est la tribu borélienne sur $\mathscr{C}_0^2(\mathbb{R}^m)$; $\mathscr{B}_{m,t}^2$ est la tribu engendrée par la famille d'applications: $\{f \in \mathscr{C}_0^2(\mathbb{R}^m) \mapsto f(s, \tau), s \leqslant t, \tau \in \mathbb{R}^+\}$. Enfin, μ_m^2 est la mesure de Wiener sur $\mathscr{C}_0^2(\mathbb{R}^m)$. On note $w^2 = (w_1^2, ..., w_m^2)$ l'élément générique de cet espace. On appelle processus d'Ornstein–Uhlenbeck sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)$ l'application: $(t, w^2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_0^2(\mathbb{R}^m) \mapsto x_{w^2}(t) \in \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)$ définie par:

$$x_{w^2}(t)(\tau) = \int_{-\infty}^{t} \int_0^\tau e^{(s-t)/2} w^2(ds, d\sigma).$$

Ce processus possède la propriété de laisser invariante la mesure de Wiener μ_m.

Soit D_p l'ensemble des fonctions Φ de $L^p(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)$ pour lesquelles il existe une fonction $\Psi \in L^p(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)$ telle que:

$$\{\Phi(x_{w^2}(t)) - \int_0^t \Psi(x_{w^2}(s))\, ds, \mathscr{B}^2_{m,t}, P\}$$

soit une martingale, P étant la loi du processus x_{w^2} considéré comme une application de $\mathscr{C}_0^2(\mathbb{R}^m)$ dans lui-même et distribué initialement selon la mesure μ_m.

Une telle fonction Ψ si elle existe est unique; on la note $\mathcal{C}\!\ell_p \Phi$. Il résulte de l'unicité que $\mathcal{C}\!\ell_{q|D_p} = \mathcal{C}\!\ell_p$ si $q \leqslant p$.[1] On note L l'opérateur $\mathcal{C}\!\ell_2$ et on l'appelle opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck.

1.3.2. Proposition. *L'opérateur (L, D_2) est un opérateur auto-adjoint sur $L^2(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)$, défini négatif.*

Soit de plus α: $\mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ une fonctionnelle $\mathscr{B}_{m,t}$-nonanticipante appartenant à $(D_2)^m$ pour $t \leqslant T$ et telle que: $E_m(\int_0^T (|\alpha(t)|^2 + |L\alpha(t)|^2)\, dt) < \infty$. On définit: $\xi(t) = \int_0^t \alpha_i(s)\, dw^i(s)$. Alors $\xi(t) \in D_2$ pour $t \leqslant T$ et $L\xi(t) = \int_0^t (L\alpha_i(s) - \frac{1}{2}\alpha_i(s))\, dw^i(s)$.

1.3.3. Définition–Théorème. *Soient Φ_1 et Φ_2 deux éléments de D_2. Alors $\Phi_1 \cdot \Phi_2 \in D_1$. L'application $(\Phi_1, \Phi_2) \mapsto \mathcal{C}\!\ell_1(\Phi_1, \Phi_2) - \Phi_1 L\Phi_2 - \Phi_2 L\Phi_1$ est une application bilinéaire symétrique définie positive de $D_2 \times D_2$ dans $L^1(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)$. On la notera: $(\Phi_1, \Phi_2) \mapsto \nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2$. Elle possède les propriétés suivantes:*

(1) $\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)} \nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2\, d\mu_m = -\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)} \Phi_1 L\Phi_2\, d\mu_m = -\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)} \Phi_2 L\Phi_1\, d\mu_m$,

(2) $\{[\Phi_1(x_w(t)) - \int_0^t L\Phi_1(x_w(s))\, ds][\Phi_2(x_w(t)) - \int_0^t L\Phi_2(x_w(s))\, ds] - \int_0^t (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2)(x_w(s))\, ds, \mathscr{B}^2_{m,t}, P\}$ *est une martingale.*

1.3.4. Définition. On note κ_p l'espace des fonctions de D_{2p} telles que $\|\nabla\Phi\|^4 = (\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi)^2 \in L^p(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)$ et $\kappa = \bigcap_{p \geqslant 2} \kappa_p$. L'espace κ_p muni de la norme:

$$\|\Phi\|_{\kappa_p} = [E_m(|\Phi|^{2p} + |L\Phi|^{2p} + |\nabla\Phi \cdot \nabla\Phi|^{2p})]^{1/2p}$$

est un espace de Banach. Enfin si α: $\mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ est une fonctionnelle $\mathscr{B}_{m,t}$-nonanticipante, on définit:

$$\|\alpha\|_{\kappa_{p,T}} = [E_m(\sup_{t \leqslant T} (|\alpha_t|^{2p} + |L\alpha_t|^{2p} + |\nabla\alpha_t \cdot \nabla\alpha_t|^{2p}))]^{1/2p}.$$

[1] Les opérateurs $\mathcal{C}\!\ell_p$ sont des opérateurs fermés.

1.3.5. THÉORÈME. *Soit $\Phi \in (\kappa_1)^n$ et $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la condition de croissance*:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\frac{|f(x)|}{1+|x|^2} + \frac{\sum_{i=1}^n |\partial f(x)/\partial x_i|}{1+|x|} + \sum_{i,j=1}^n \left| \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_j}(x) \right| \right) < +\infty.$$

Alors $f \circ \Phi \in D_1$ et:

$$\mathscr{A}_1(f \circ \Phi) = \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n (\nabla \Phi_k \cdot \nabla \Phi_l) \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l} (\Phi(x)) + \sum_{k=1}^n L\Phi_k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k} (\Phi(x)).$$

De plus, si $\Phi \in (\kappa_2)^n$, $f \circ \Phi \in \kappa_1$ et

$$\nabla(f \circ \Phi) \nabla \Psi = \sum_{k=1}^n (\nabla \Phi_k \cdot \nabla \Psi) \frac{\partial f}{\partial x_k} (\Phi(x)) \qquad \textit{pour} \quad \Psi \in \kappa_1.$$

1.4. *Action de L sur les Solutions d'Équations Différentielles Stochastiques*

1.4.1. LEMME. *Soit $\alpha: \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$ et $\beta = \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ des v.a. $\mathscr{B}_{m,t}$ non-anticipantes telles que $\alpha_i(t)$ et $\beta(t)$ appartiennent à κ_2 pour tout $t \leqslant T$ et tout i. On suppose de plus*:

$$\int_0^T (\|\alpha(t)\|_{\kappa_2}^4) + \|\beta(t)\|_{\kappa_2}^4)\, dt < +\infty.$$

Alors, si $\xi(t) = \xi_0 + \int_0^t \alpha_i(s)\, dw^i(s) + \int_0^t \beta(s)\, ds$, $\xi(t)$ appartient à κ_2 pour tout t et:

$$L\xi(t) = \int_0^t (L\alpha_i(s) - \tfrac{1}{2}\alpha_i(s))\, dw^i(s) + \int_0^t L\beta(s)\, ds,$$

$$\nabla \xi(t)\, \nabla \xi(t) = 2 \int_0^t \nabla \xi(s) \cdot \nabla \alpha_i(s)\, dw^i(s) + \int_0^t (\nabla \alpha(s) \cdot \nabla \alpha(s) + 2\nabla \xi(s) \cdot \nabla \beta(s) + |\alpha|^2(s))\, ds.$$

De plus, il existe des constantes $\mathscr{B}_p(T)$ ne dépendant que de p et T telles que:

$$E_m(\sup_{t \leqslant T} |\xi(t)|^{2p}) \leqslant \mathscr{B}_p(T) \left[\|\xi_0\|_{L^{2p}}^{2p} + \int_0^T E_m(|\alpha(t)|^{2p} + |\beta(t)|^{2p})\, dt \right],$$

$$E_m(\sup_{t \leqslant T} |L\xi(t)|^{2p}) \leqslant \mathscr{B}_p(T) \left[\int_0^T E_m(|L\alpha(t)|^{2p} + |\alpha(t)|^{2p} + |L\beta(t)|^{2p})\, dt \right],$$

$$E_m(\sup_{t \leqslant T} \|\nabla \xi(t)\|^{2p}) \leqslant \mathscr{B}_p(T) \left[\int_0^T E_m(\|\nabla \alpha(t)\|^{2p} + |\alpha(t)|^{2p} + \|\nabla \beta(t)\|^{2p})\, dt \right].$$

1.4.2. THÉORÈME. *Soient* $\sigma : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N \otimes \mathbb{R}^m$ *et* $\beta : \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. *On suppose que* σ *et* β *sont de classe* $\mathscr{C}^2$ *et que leurs dérivées premières sont dans* $\mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^N)$. *On se donne* $y_0 \in \mathbb{R}^N$ *et* $\eta : \mathbb{R}^+ \times \mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^M$ *une v.a.* $\mathscr{B}_{m,t}$-*nonanticipante appartenant à* $(\kappa)^M$ *pour tout* $t \leqslant T$ *et telle que*:

$$\int_0^T \|\eta(t)\|_{\kappa_1}^2 \, dt < +\infty.$$

Alors, presque surement, l'équation

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \sigma(\eta(s), y(s)) \, dw(s) + \int_0^t \beta(\eta(s), y(s)) \, ds$$

a une solution qui est dans $(\kappa)^N$ *pour* $0 < t \leqslant T$.

1.5. Reprenons la démonstration du théorème de P. Malliavin. On suppose que le processus g_t est solution d'une équation différentielle stochastique de la forme:

$$y(t) = y_0 + \int_0^t \sigma(y(s)) \, dw(s) + \int_0^t \beta(y(s)) \, ds$$

où $y_0 \in \mathbb{R}^n$ et σ et β vérifient les hypothèses du thérorème 1.4.2. Alors, il résulte de ce théorème que g_t est dans κ^n pour tout t. Appliquant alors le théorème 1.3.5, on a:

$$\nabla g_t^i \cdot \nabla(\varphi \circ g_t) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(g_t)(\nabla g_t^i \cdot \nabla g_t^k).$$

Notons A la matrice de coefficients $\nabla g_t^i \cdot \nabla g_t^j$, $\tilde{A}$ la matrice de ses cofacteurs et Δ son déterminant. Alors:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(g_t) &= (\nabla(\varphi \circ g_t) \cdot \nabla g_t^i) \, \tilde{a}_{ik} \Delta^{-1} \\ &= [L(\tilde{\varphi}_t g_t^i) - \tilde{\varphi}_t L g_t^i - g_t^i L \tilde{\varphi}_t] \, \tilde{a}_{ik} \Delta^{-1}. \end{aligned}$$

Utilisant le théorème 1.4.2, on peut montrer que $\tilde{a}_{ik}$ est dans κ et qu'il en est de même de Δ^{-1} si on fait l'hypothèse: $\Delta^{-1} \in L^p(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)$, $\forall p$. On peut alors appliquer la proposition 1.3.2 et on obtient:

$$\begin{aligned} &\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^n)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}(g_t(w)) \, \mu_m(dw) \\ &\qquad = E_m[\tilde{\varphi}_t(g_t^i L(\tilde{a}_{ik} \Delta^{-1}) - \tilde{a}_{ik} \Delta^{-1} L g_t^i - L(g_t^i \tilde{a}_{ik} \Delta^{-1})]. \end{aligned}$$

On a ainsi le théorème:

THÉORÈME. *Soit g_t un processus de diffusion défini par une équation de la forme*:

$$y(t) = y_o + \int_0^t \sigma(y(s))\, dw(s) + \int_0^t \beta(y(s))\, ds$$

dont les coefficients σ et β sont de classe $\mathscr{C}_b^\infty$. Soit A la matrice de coefficients $\nabla g_t^i \cdot \nabla g_t^j$. Si A est inversible presque surement, la loi de g_t est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Si, de plus, $(\text{dét}\, A)^{-1}$ *est dans L^p pour tout p, la densité est de classe $\mathscr{C}^\infty$.*

2. LA FORMULE DE BAYES GÉNÉRALISÉE

2.1. PROPOSITION. *Soit $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ un espace de probabilité, $\mathscr{F}'_t$ une famille croissante de tribus de Ω' incluses dans $\mathscr{F}'$, et $(\beta_1,..., \beta_n)$, n processus de Wiener indépendants définis sur cet espace, adaptés à la famille $\mathscr{F}'_t$. Soient enfin: (α_1, α_2), (γ_1, γ_2): $\Omega' \times [0, T] \to (\mathbb{R}^m \otimes \mathbb{R}^m) \times (\mathbb{R}^p \otimes \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ des v.a. $\mathscr{F}'_t$-nonanticipantes et bornées par une constante L. On note $\{\zeta_i\}_{i=1,2}$ les processus à valeurs dans $\mathbb{R}^m$ (resp. $\mathbb{R}^p$)*

$$\zeta_i(t) = \int_0^t \alpha_i(s)\, d\beta^i(s) + \int_0^t \gamma_i(s)\, ds + \zeta_i(0)$$

où $\beta^1 = (\beta_1 \cdots \beta_m)$ et $\beta^2 = (\beta_{m+1} \cdots \beta_n)$. On suppose $E'(\zeta_i^2(0)) < +\infty$. Alors le système différentiel stochastique:

$$dX_t = \tilde{b}_1(t, X_t, \zeta_2)\, d\zeta_1(t) + \tilde{b}_2(t, X_t, \zeta_2)\, d\zeta_2(t)$$
$$+ \tilde{a}(t, X_t, \zeta_2)\, dt, \qquad X_0 \in L^2(\Omega', P')$$

admet une solution unique. On note $\nu_{\alpha,\beta,\gamma}$ la mesure sur $\mathscr{C}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^m)$ image de la mesure de Wiener par l'application: $(\beta_1 \cdots \beta_n) \mapsto (\zeta_1, \zeta_2)$. Il existe une fonctionnelle borélienne Q_t sur $[0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathscr{C}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)$ telle que: $\forall(\alpha\beta\gamma)$, $\forall X_0: X_t = Q_t(X_0, \zeta_1, \zeta_2)$, $P_0 \otimes \nu_{\alpha,\beta,\gamma}$-presque surement, où P_0 est la loi de X_0.

Preuve. On utilise un procédé de discrétisation; i.e. on définit la suite de v.a. $X_t^n: X_0^n = X_0$ et pour $Tk/n \leqslant t \leqslant T(k+1)/n$, on définit:

$$X_t^n = X_0 + \sum_{i=0}^{k-1} \left[\tilde{b}_1\left(\frac{Ti}{n}, X_{Ti/n}^n, \zeta_2\right)\left(\zeta_1\left(T\frac{(i+1)}{n}\right) - \zeta_1\left(\frac{Ti}{n}\right)\right)\right.$$
$$+ \tilde{b}_2\left(\frac{Ti}{n}, X_{Ti/n}^n, \zeta_2\right)\left(\zeta_2\left(T\frac{(i+1)}{n}\right) - \zeta_2\left(\frac{Ti}{n}\right)\right)$$

$$+ \tilde{a}\left(\frac{Ti}{n}, X^n_{Ti/n}, \zeta_2\right) \cdot \frac{T}{n}\Bigg]$$

$$+ \tilde{b}_1\left(\frac{Tk}{n}, X^n_{Tk/n}, \zeta_2\right)\left(\zeta_1(t) - \zeta_1\left(\frac{Tk}{n}\right)\right) + \tilde{b}_2\left(\frac{Tk}{n}, X^n_{Tk/n}, \zeta_2\right)$$

$$\times \left(\zeta_2(t) - \zeta_2\left(\frac{Tk}{n}\right)\right) + \tilde{a}\left(\frac{Tk}{n}, X^n_{Tk/n}, \zeta_2\right)\left(t - \frac{Tk}{n}\right).$$

Montrons tout d'abord que: $\sup_{N\in\mathbb{N}} E'(\sup_{t\leqslant T} |X^N_t|^2) < +\infty$,

$$E'(\sup_{t\leqslant T} |X^N_t|^2) \leqslant 3\left[E'(|X_0|^2) + 4n^2L^2M^2T + 3n\frac{T^2}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\left\{2nM^2 + L'_1\left(\int_0^{Ti/N} |\zeta_2(s)|^2\, dK(s)\right) + L'_2\left(\left|\zeta_2\left(\frac{Ti}{N}\right)\right|^2 + |X^N_{Ti/N}|^2\right)\right\}\right].$$

Il existe donc deux constantes M et M' telles que:

$$E'(\sup_{t\leqslant T} |X^N_t|^2) \leqslant M + M'\frac{T}{N}\sum_{i=0}^{n-1} E'(X^N_{Ti/N})^2.$$

Or il est clair qu'un calcul identique au précédent entraîne:

$$E'(X^N_{kT/N})^2 \leqslant M + M'\frac{T}{N}\sum_{i=0}^{k-1} E'(X^N_{Ti/N})^2$$

On en déduit par récurrence que:

$$E'(X^N_{kT/N})^2 \leqslant \left(1 + M'\frac{T}{N}\right)^{k-1}\left(M + M'\frac{T}{N}E'X_0^2\right) \qquad \text{pour} \quad k \geqslant 1.$$

D'où:

$$E'(\sup_{t\leqslant T} |X^N_t|^2) \leqslant \left(M + M'\frac{T}{N}E'X_0^2\right)\left(1 + M'\frac{T}{N}\right)^{N-1}.$$

Or le membre de gauche converge vers $M \exp M'T$ lorsque N tend vers l'infini donc est borné indépendamment de N. Montrons maintenant que:

$$\mathscr{E}_N = E'\left(\sup_{t\leqslant T}\left(X^N_t - X_0 - \int_0^t \tilde{b}_1(s, X^N_s, \zeta_2)\, d\zeta_1(s) - \int_0^t \tilde{b}_2(s, X^N_s, \zeta_2)\, d\zeta_2(s) - \int_0^t \tilde{a}(s, X^N_s, \zeta_2)\, ds\right)^2\right)$$

tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

Pour celà, on remplace X_t^N par son expression explicite et on utilise 0.4.

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_N \leqslant 2L_2' \sum_{i=0}^{N-1} \left(\int_{Ti/N}^{T(i+1)/N} E'(|X_{Ti/N}^N - X_s^N|^2)\, ds\right) n^2[L^2 + 3T(1+L^2)] \\ \times E'(|X_{Ti/N}^N - X_s^N|^2) \\ \leqslant \{2M^2L^2[4n^2 + 6n^2T] + 2L_1' TE'(\sup_{s\leqslant T} |\zeta_2(s)|^2) \\ + 2L_2'E'(\sup_{s\leqslant T} (|\zeta_2(s)|^2 + |X_s^N|^2))\} \frac{T}{N}.\end{aligned}$$

Il existe donc une constante P telle que: $\mathscr{E}_N \leqslant P/N$. On en déduit que:

$$\begin{aligned}E'(\sup_{t\leqslant t_0} |X_t^N - X_t^{N'}|^2) \\ \leqslant \frac{2P}{\inf(N,N')} + 2E'\left(\sup_{t\leqslant t_0} \left|\int_0^t [\tilde{b}_l(s, X_s^N, \zeta_2) - b_l(s, X_s^{N'}, \zeta_2)]\, d\zeta_l(s)\right.\right. \\ + \int_0^t [\tilde{b}_2(s, X_s^N, \zeta_2) - \tilde{b}_2(s, X_s^{N'}, \zeta_2)]\, d\zeta_2(s) \\ \left.\left. + \int_0^t [\tilde{a}(s, X_s^N, \zeta_2) - \tilde{a}(s, X_s^{N'}, \zeta_2)]\, ds\right|^2\right) \\ \leqslant \frac{2P}{\inf(N,N')} + 2\left(\int_0^{t_0} E' |X_s^N - X_s^{N'}|^2\, ds\right) n^2L_2'[L^2 + 3T(1+L^2)].\end{aligned}$$

Notons Q la constante en facteur de l'intégrale. Alors il résulte du lemme de Gronwall: $E'(\sup_{s<T} |X_s^N - X_s^{N'}|^2) \leqslant (2P/\inf(N,N'))\exp(QT)$. Ceci implique que la suite X_t^N est convergente dans L^2 uniformément en $t \leqslant T$. Soit X_t sa limite. On a alors:

$$P'\left(\sup_{t\leqslant T} |X_t^{2^N} - X_t| > \frac{1}{N^2}\right) \leqslant \frac{2PN^4}{2^N} \exp QT.$$

On déduit du lemme de Borel–Cantelli que la suite $X_t^{2^N}$ est presque surement convergente vers X_t, uniformément en t. Montrons enfin que X_t est solution de l'équation. Considerons:

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_\infty = E'\left(\sup_{t\leqslant T} \left|X_t - X_0 - \int_0^t \tilde{b}_1(s, X_s, \zeta_2)\, d\zeta_1(s)\right.\right. \\ \left.\left. - \int_0^t \tilde{b}_2(s, X_s, \zeta_2)\, d\zeta_2(s) - \int_0^t \tilde{a}(s, X_s, \zeta_2)\, ds\right|^2\right),\end{aligned}$$

$$\mathscr{E}_\infty \leqslant 3\left\{E'(\sup_{t\leqslant T} |X_t - X_t^N|^2) + \mathscr{E}_N + Q\left(\int_0^T E'(|X_s - X_s^N|^2)\, ds\right)\right\}$$

D'où:

$$\mathscr{E}_\infty \leqslant (3P/N)(2 \exp QT + 1 + 2Q \exp QT), \qquad \forall N \Rightarrow \mathscr{E}_\infty = 0.$$

Soit alors $\{Q_t^N\}_{n \in N}$ une suite de fonctionnelles boréliennes sur $[0, T] \times \mathbb{R}^m \times \mathscr{C}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)$ construite de la façon suivante: étant donné $(c_1, c_2) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p)$, $Q_t^N(x, c_1, c_2)$ est obtenu en remplaçant dans l'expression de X_t^N, ζ_i par c_i et X_0 par x. On définit:

$$Q_t = \lim_{n \to \infty} Q_t^{2^N} \text{ lorsque cette limite existe.}$$

$$Q_t = 0 \text{ sinon.}$$

Montrons que cette fonction est borélienne. Soit

$$\omega(x, c_1, c_2) = \lim_{p \to +\infty} \left[\lim_{q \to +\infty} \sup_{p \leqslant N \leqslant N' \leqslant q} \|(Q_t^{2^N} - Q_t^{2^{N'}})(x, c_1, c_2)\|_{\mathscr{C}[0,T]} \right].$$

Cette fonction, à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$, est obtenue en prenant une limite décroissante de limites croissantes de fonctions boréliennes. Elle est donc borélienne. L'indicatrice de l'ensemble où elle est nulle l'est également. Or

$$Q_t = \lim_{N \to +\infty} Q_t^{2^N} \mathbb{1}_{\{(x, c_1, c_2), \omega(x, c_1, c_2) = 0\}}$$

donc Q_t est borélienne comme limite de fonctions boréliennes. D'après ce qui précède, $Q_t^{2^N}(X_0, \zeta_1, \zeta_2) = X_t^{2^N}$ est $P_0 \otimes \nu_{\alpha,\beta,\gamma}$ presque surement convergent, pour tout t, vers X_t. On en déduit que, $P_0 \otimes \nu_{\alpha,\beta,\gamma}$ presque surement $X_t = Q_t(X_0, \zeta_1, \zeta_2)$, $\forall t < T$.

2.2. Proposition. *Soit $(\Omega', \mathscr{F}', P')$ un espace probabilisé muni d'une famille croissante de tribus $\{\mathscr{F}'_t\}$. Soit $(\beta_t, \mathscr{F}'_t)$ un processus de Wiener à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ et $a = (a_t, \mathscr{F}'_t)$ un processus indépendant de β à valeurs dans $\mathbb{R}^q$. Soit enfin ζ la solution (supposée existante) de l'équation:*

$$d\zeta_t = C(t, a, \zeta)\, dt + D(t, \zeta)\, d\beta_t$$

où C et D sont des matrices de dimensions respectives $p \times 1$, $p \times p$, vérifiant les conditions suivantes:

(a) $\int_0^T |C(t, a, c)|\, dt < +\infty$ *et* $\int_0^T DD^*(t, c)\, dt < +\infty$, $\forall (a, c) \in \mathscr{C}(\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^p)$.

(b) *Il existe une fonction croissante K, $0 < K < 1$ et des constantes C, L_1 et L_2 telles que: pour tout couple (i, j):*

$$|D_{ij}(t,c)-D_{ij}(t,c')\leqslant L_1\int_0^t |c_s-c'_s|^2\,dK(s)+L_2\,|c_t-c'_t|^2,$$

$$D_{ij}^2(t,c)\leqslant L_1\int_0^t (1+|c_s|^2)\,dK(s)+L_2(1+|c_t|^2).$$

D'autre part:

$$(DD^*(t,c)\cdot Z,Z)\geqslant C\,|Z|^2,\qquad \forall Z\in\mathbb{R}^p,\qquad \forall (c,c')\in\mathscr{C}(\mathbb{R}^p)^2.$$

(c) $P'\ (\int_0^T |C|^2(t,\alpha,\zeta)\,dt<+\infty)=P'\ (\int_0^T |C|^2(t,\alpha,\eta)\,dt<+\infty)=1$ *où η est la solution de l'équation*:

$$d\eta_t=D(t,\eta)\,d\beta_{t'},\qquad \eta_0=\zeta_0.$$

(d) $E'(\int_0^T |C(t,\alpha,\zeta)|\,dt)<+\infty$, $P'(\int_0^T |\bar{C}|^2(t,\zeta)\,dt<+\infty)=1$ *où* $\bar{C}(t,\zeta)=E'(C(t,\alpha,\zeta)\,|\,\mathscr{F}'^{\zeta}_t)$ *et* $\mathscr{F}'^{\zeta}_t$ *est la tribu engendrée par les v.a.* $\zeta(s)$, $s\leqslant t$.

Alors, si $g(\alpha,\zeta)$ est une fonctionnelle $\mathscr{F}'^{\alpha,\zeta}_T$-measurable, telle que $E'\,|g(\alpha,\zeta)|<+\infty$, *on a*:

$$E'(g(\alpha,\zeta)\,|\,\mathscr{F}'^{\zeta}_t)=\int_{\mathscr{C}(\mathbb{R}^q)} g(\alpha,\zeta)\,\rho_T(\alpha,\zeta)\,d\mu_{\alpha|\zeta_0}(a)$$

où $\mu_{\alpha|\zeta_0}$ est la loi de α conditionné par ζ_0 et:

$$\begin{aligned}\rho_T(a,\zeta)=\exp\Bigg(&\int_0^T (C(t,a,\zeta)-\bar{C}(t,\zeta))^*[D(t,\zeta)^{-1}]^*\,d\bar{\beta}_t\\&-\tfrac{1}{2}\int_0^T [C(t,a,\zeta)-\bar{C}(t,\zeta)]^*(DD^*(t,\zeta))^{-1}\\&\times[C(t,a,\zeta)-\bar{C}(t,\zeta)]\,dt\Bigg)\end{aligned}$$

où $d\bar{\beta}_t=D(t,\zeta)^{-1}(d\zeta_t-\bar{C}(t,\zeta)\,dt)$ et $(\bar{\beta}_t,\mathscr{F}^{\zeta}_t)$ est un processus de Wiener.

Preuve. C'est la généralisation immédiate de la formule de Bayes généralisée en 1 dimension, obtenue en utilisant la version vectorielle des théorèmes d'absolue continuité de mesure (cf. [3, p. 279]). $\bar{\beta}_t$ est le processus d'innovation.

2.3. COROLLAIRE. *Soit φ une application continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ telle que*: $E(|\varphi(\theta_t)|)<+\infty$. *Alors*:

$$E(\varphi(\theta_t)\,|\,\mathscr{F}^{\xi}_t)=\int_{\mathbb{R}^m\times\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)} \varphi(Q_t(x,w,\xi))\,\rho_t(x,w,\xi)\,dF_{\xi_0}(x)\,d\mu_m(w)$$

où

$$dF_{\xi_0}(x) = P(\theta_0 \in dx \mid \xi_0)$$

et

$$\rho_t(x, w, \xi) = \exp\left(\int_0^t (A(s, Q_s(x, w, \xi), \xi) - \bar{A}(s, \xi))^* [BB^*(s, \xi)]^{-1/2} \, d\bar{\xi}_s \right.$$
$$- \tfrac{1}{2} \int_0^t (A(s, Q_s(x, w, \xi), \xi) - \bar{A}(s, \xi))^*$$
$$\left. \times (BB^*(s, \xi))^{-1} (A(s, Q_s(x, w, \xi), \xi) - \bar{A}(s, \xi)) \, ds \right)$$

avec $\bar{A}(s, \xi) = E(A(s, Q_s(x, w, \xi), \xi) \mid \mathscr{F}_s^\xi)$ *et* $d\bar{\xi}_s = (BB^*)^{1/2}(s, \xi)[d\xi_s - \bar{A}(s, \xi) \, ds]$. $(\bar{\xi}_t, \mathscr{F}_t^\xi)$ *est un processus de Wiener.*

Preuve. On déduit du paragraphe 0 et de la proposition 2.1 où l'on prend $\zeta_1 = \tilde{W}^1$ et $\zeta_2 = \xi$ que:

$$\theta_t = Q_t(\theta_0, \tilde{W}^1, \xi).$$

On applique alors la proposition 2.2 en prenant: $(\Omega', \mathscr{F}', \mathscr{F}'_t, P') = (\Omega, \mathscr{F}, \mathscr{F}_t, P)$; $\beta = \tilde{W}_2$; $\alpha = (\theta_0, \tilde{W}_1)$; $\zeta = \xi$; $C(t, \alpha, \zeta) = A(t, Q_t(\theta_0, \tilde{W}_1, \zeta), \zeta)$; $D(t, \zeta) = (BB^*)^{1/2}(t, \zeta)$; $g(\alpha, \zeta) = \varphi(Q_t(\theta_0, \tilde{W}_1, \zeta))$.

3. Absolue continuité des lois conditionnelles

3.1. Lemme. *Soit* $\varphi \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^m)$. *Alors*:

$$E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}(\theta_t) \,\middle|\, \mathscr{F}_t^\xi \right) = \int_{\mathbb{R}^m} I_t(x, \xi) \, dF_{\xi_0}(x)$$

où

$$I_t(x, \xi) = \int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}(Q_t(x, w, \xi)) \, \rho_t(x, w, \xi) \, d\mu_m(w).$$

Preuve. Corollaire 2.3.

3.2. On note $(\Omega', \mathscr{F}', \mathscr{F}'_t, \nu)$ l'espace produit:

$$(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m) \times \Omega, \mathscr{B}_m \times \mathscr{F}, \mathscr{B}_{m,t} \times \mathscr{F}_t, \mu_m \times \mu).$$

Comme précédement, on notera E_m l'intégration sur le premier facteur, E

celle sur le second; $\mathscr{E}$ désignera l'intégration sur le produit. Toutes les v.a. définies sur Ω seront désormais considérées comme des v.a. sur Ω' ne dépendant que de la deuxième coordonnée. On notera w l'élément générique sur le premier facteur. On définit sur Ω' l'opérateur L de la façon suivante:

Si f est une application définie sur Ω', on note, pour tout $\omega \in \Omega$, f_ω l'application définie sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)$ par: $f_\omega(w) = f(w, \omega)$. On définit:

$$Lf(w, \omega) = \tilde{L} f_\omega(w)$$

où $\tilde{L}$ est l'opérateur d'Ornstein–Uhlenbeck sur $\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)$ défini en 1.3.1. On définit, plus généralement, des opérateurs $\mathscr{A}_p$, $p \neq 2$, de façon analogue. κ_p est l'espace des applications f définies sur Ω' telles que

3.2.1. $\|f\|_{\kappa_p} = \{\mathscr{E}(|f|^{2p} + |Lf|^{2p} + |\nabla f \cdot \nabla f|^{2p})\}^{1/2p} < +\infty$ et $\kappa = \bigcap_{p \geqslant 2} \kappa_p$. Si $\alpha\colon \Omega' \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une v.a. $\mathscr{F}_t$ non-anticipante, on définit: $\|\alpha\|_{\kappa_{p,T}} = [\mathscr{E}(\sup_{t \leqslant T}(|\alpha_t|^{2p} + |L\alpha_t|^{2p} + |\nabla \alpha_t \cdot \nabla \alpha_t|^{2p}))]^{1/2p}$.

3.2.2. LEMME. *Les opérateurs $\mathscr{A}_p$ sont des opérateurs fermés pour la norme usuelle de $L^p(\Omega', \nu)$.*

Preuve. Soit X_n une suite de variables aléatoires définies sur Ω', convergeant dans $L^p(\Omega', \nu)$ vers une v.a. X. On suppose que, pour tout n, X_n est dans $\mathscr{D}_p$ et que la suite $\mathscr{A}_p X_n$ converge dans $L^p(\Omega', \nu)$ vers une v.a. Y. La suite de v.a. $\|X_n - X\|^p_{L^p(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)}$, définie sur Ω, converge donc vers 0 dans $L^1(\Omega, P)$.

On peut donc en extraire une sous-suite qui converge presque surement vers 0. Notons $\{n_1, ..., n_i, ...\}$ l'indexation de cette sous-suite. Alors, la suite $\|\mathscr{A}_p X_{n_i} - Y\|^p_{L^p(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)}$ converge vers 0 dans $L^1(\Omega, P)$. On peut donc de même en extraire une sous-suite qui converge presque surement vers 0. Notons $\{m_1, ..., m_i, ...\}$ l'indexation de cette sous-suite. P-presque surement, on a:

$$X = \lim X_{m_i} \qquad \text{et} \qquad Y = \lim \mathscr{A} X_{m_i}$$

les limites étant dans $L^p(\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m), \mu_m)$. Alors, d'après le paragraphe 1.3.1, $X \in \mathscr{D}_p$ et $Y = \mathscr{A}_p X$, sauf peut-être sur un ensemble de P-mesure nulle.

Dans la suite, s'il n'y a pas d'erreurs possibles, L^p désignera $L^p(\Omega', \nu)$. La suite de la démonstration va consister à effectuer une intégration par parties dans $I_t(x, \xi)$ par un procédé semblable à celui de 1.5 à l'aide de l'opérateur L.

On a besoin pour cela d'établir un théorème parallèle au théorème 1.4.2, concernant l'action de L sur les solutions d'équations différentielles stochastiques d'un type particulier.

3.3. THÉORÈME. *Soient (C, D, E) $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s \times \mathscr{C}(\mathbb{R}^p) \to (\mathbb{R}^s \otimes \mathbb{R}^m) \times (\mathbb{R}^s \otimes \mathbb{R}^p) \times \mathbb{R}^s$ des applications vérifiant les hypothèses $(H_i)_{i=0,1}$, de classe*

$\mathscr{C}^2$ par rapport à $(\eta, x) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^s$ et qui sont continues par rapport à l'ensemble des variables ainsi que leurs dérivées successives en (η, x) que l'on suppose de plus bornées. Soit $\eta = \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}^r$ une v.a. $\mathscr{F}'_t$ non-anticipante, presque surement continue, appartenant à κ pour tout $t \leqslant T$ et vérifiant $\|\eta_t\|_{\kappa_p, T} < +\infty$, pour tout p. Soit X_0 une v.a. $\mathscr{F}_0$-mesurable. Alors l'équation:

$$X_t = X_0 + \int_0^t C(s, \eta_s, X_s, \xi)\, dw_s + \int_0^t D(s, \eta_s, X_s, \xi)\, d\xi_s + \int_0^t E(s, \eta_s, X_s, \xi)\, ds$$

admet une solution qui est dans κ pour tout $t \leqslant T$. De plus, LX_t et la matrice $((\nabla X^i_t \cdot \nabla X^j_t))$ vérifient des équations différentielles stochastiques linéaires non-homogènes, dont les coefficients sont des fonctions C^∞ des dérivées premières et secondes par rapport à η et x de C, D, et E.

Preuve. On reprend les différentes étapes de la démonstration du théorème 1.4.2 donné dans [9], en les adaptant au cas présent. La méthode utilisée est la méthode d'iteration de Picard, i.e., on définit la suite:

$$X^0_t = X_0,$$

$$X^n_t = X_0 + \int_0^t C(s, \eta_s, X^{n-1}_s, \xi)\, dw_s + \int_0^t D(s, \eta_s, X^{n-1}_s, \xi)\, d\xi_s + \int_0^t E(s, \eta_s, X^{n-1}_s, \xi)\, ds.$$

3.3.1. Lemme. *Soit $\alpha: \Omega' \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une v.a. $\mathscr{F}'_t$-nonanticipante telle que α_t est dans κ pour tout $t \leqslant T$ et que: $\int_0^T \|\alpha_t\|^{2p}_{\kappa_p}\, dt < +\infty$ pour tout p. On définit: $\zeta_t = \int_0^t \alpha_s\, d\tilde{W}_i(s)$ ($i \leqslant p$ fixé). Alors ζ_t est dans κ pour tout $t \leqslant T$ et*

$$L\zeta_t = \int_0^t L\alpha_s\, d\tilde{W}_i(s),$$

$$\nabla\zeta_t \cdot \nabla\zeta_t = 2\int_0^t \nabla\zeta_s \cdot \nabla\alpha_s\, d\tilde{W}_i(s) + \int_0^t \nabla\alpha_s \cdot \nabla\alpha_s\, ds.$$

Preuve. On suppose tout d'abord que $s \mapsto \alpha_s$ est une fonction telle qu'il existe une partition $0 \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_n \leqslant T$ de l'intervalle $[0, T]$ telle que, pour tout $\omega' \in \Omega'$, $\alpha_s(\omega')$ soit constant sur chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$. Alors

$$\zeta_t = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha_{t_i}[\tilde{W}_i(t_{i+1}) - \tilde{W}_i(t_i)] + \alpha_{t_k}[\tilde{W}_i(t) - \tilde{W}_i(t_k)] \qquad \text{si} \quad t \in [t_k, t_{k+1}].$$

D'autre part, un calcul immédiat conduit aux équations annoncées pour $L\zeta_t$ et $\nabla\zeta_t \cdot \nabla\zeta_t$; de plus il existe des constantes universelles $B_p(T)$ telle que:

$$\mathscr{E}(\sup_{t\leqslant T} |L\zeta_t|^{2p}) \leqslant B_p(T) \left(\int_0^T \mathscr{E}(|L\alpha_t|^{2p})\, dt\right),$$

$$\begin{aligned}\mathscr{E}(\sup_{t\leqslant T} \|\nabla\zeta_t\|^{2p}) &\leqslant B_p(T) \left(\int_0^T \mathscr{E}(|\nabla\zeta_t \cdot \nabla\alpha_t|^p)\, dt \right.\\ &\qquad \left. + \int_0^T \mathscr{E}(\|\nabla\alpha_t\|^{2p})\, dt\right)\\ &\leqslant B'_p(T) \left[(\mathscr{E}(\sup_{t\leqslant T} \|\nabla\zeta_t\|^{2p}))^{1/2} \left(\int_0^T \mathscr{E}(\|\nabla\alpha_t\|^{2p})\, dt\right)^{1/2} \right.\\ &\qquad \left. + \int_0^T \mathscr{E}(\|\nabla\alpha_t\|^{2p})\, dt\right].\end{aligned}$$

On déduit de la dernière inégalité qu'il existe une constante $B''_p(T)$ telle que:

3.3.1.1

$$\mathscr{E}(\sup_{t\leqslant T} \|\nabla\zeta_t\|^{2p}) \leqslant B''_p(T) \left(\int_0^T \mathscr{E}(\|\nabla\alpha_t\|^{2p})\, dt\right).$$

On suppose maintenant que α_t, $L\alpha_t$ et $\|\nabla\alpha_t\|^2$ sont continus dans tout L^p. Posons alors: $\alpha_t^n = \alpha_{[nt]/n}$ et montrons que $\zeta_t^n = \int_0^t \alpha_s^n \, d\tilde{W}_i(s)$ et $L\zeta_t^n$ convergent dans tout L^p respectivement vers ζ_t et $\int_0^t L\alpha_s \, d\tilde{W}_i(s)$. Ceci se déduit des inégalités:

$$\mathscr{E}(|\zeta_t - \zeta_t^n|^{2p}) \leqslant B_p(T) \left(\int_0^t \mathscr{E}(|\alpha_s - \alpha_s^n|^{2p})\, ds\right),$$

$$\mathscr{E}\left(\left| L\zeta_t^n - \int_0^t L\alpha_s \, d\tilde{W}_i(s)\right|^{2p}\right) \leqslant B_p(T) \left(\int_0^t \mathscr{E}(|L\alpha_s^n - L\alpha_s|^{2p})\, ds\right).$$

Les opérateurs $\mathscr{A}_p$ étant fermés, il en résulte que:

$$L\zeta_t = \int_0^t L\alpha_s \, d\tilde{W}_i(s).$$

On a, d'autre part, les inégalités, déduites de 3.3.1.1:

3.3.1.2

$$\mathscr{E}(\sup_{t\leqslant T} \|\nabla(\zeta_t^n - \zeta_t^m)\|^{2p}) \leqslant B''_p(T) \left(\int_0^T \mathscr{E}(\|\nabla(\alpha_t^n - \alpha_t^m)\|^{2p}\right) dt.$$

3.3.1.3

$$\begin{aligned}
&\mathscr{E}(|\|\nabla\zeta_t^n\|^2-\|\nabla\zeta_t^m\|^2|^p)\\
&\quad\leqslant B_p'(T)\left[(\mathscr{E}(\sup_{t\leqslant T}\|\nabla(\zeta_t^n-\zeta_t^m)\|^{4p}))^{1/2}\right.\\
&\qquad\times\left(\int_0^t\mathscr{E}(\|\nabla\alpha_s^n\|^{4p})\,ds\right)^{1/2}+(\mathscr{E}(\sup_{t\leqslant T}\|\nabla\zeta_t^m\|^{4p}))^{1/2}\\
&\qquad\left.\times\left(\int_0^t\mathscr{E}(\|\nabla(\alpha_s^n-\alpha_s^m)\|^{4p})\,ds+\int_0^t\mathscr{E}(\|\nabla\alpha_s^n\|^2-\|\nabla\alpha_s^m\|^2)^{2p}\right)ds\right].
\end{aligned}$$

On en déduit que $\|\nabla\zeta_t^n\|^2$ est une suite de Cauchy dans L^p et que, par suite, $\nabla\zeta_t^n\cdot\nabla\alpha_t^n$ en est une également. Les opérateurs $\mathscr{O}_p$ étant fermés, ces suites convergent respectivement vers $\|\nabla\zeta_t\|^2$ et $\nabla\zeta_t\cdot\nabla\alpha_t$. Il est alors aisé par passage à la limite de montrer que ces quantités vérifient l'équation annoncée.

Il reste donc à approcher toute v.a. α satisfaisant les hypothèses du lemme par une suite α^n de v.a. continues dans tout L^p ainsi que $L\alpha^n$ et $\|\nabla\alpha^n\|^2$. Pour cela, on introduit une fonction ρ, $\mathscr{C}^\infty$ à support compact sur $\mathbb{R}$ inclus dans $[0,T]$ et d'intégrale 1. On pose: $\alpha_t^n=\int_{[0,T]}n\rho(n(t-s))\alpha_s\,ds$. D'après le lemme 1.4.1: $L\alpha_t^n=\int_{[0,T]}n\rho(n(t-s))\,L\alpha_s\,ds$: Écrivant $\|\nabla\alpha_t^n\|^2=\frac{1}{2}(L(\alpha_t^n)^2-2\alpha_t^n\cdot L\alpha_t^n)$,

$$(\alpha_t^n)^2=\int\left(\int n\rho(n(t-u))\,n\rho(n(t-v))\,\alpha_u^n\,\alpha_v^n\,du\right)dv$$

et

$$\alpha_t^n\cdot L\alpha_t^n=\iint n\rho(n(t-u))\,n\rho(n(t-v))\,\alpha_u^n L\alpha_v^n\,du\,dv$$

et appliquant le lemme 1.4.1, on obtient:

3.3.1.4

$$\|\nabla\alpha_t^n\|^2=\iint_{[0,T]^2}n^2\rho(n(t-u))\,\rho(n(t-v))\,\nabla\alpha_u\cdot\nabla\alpha_v\,du\,dv.$$

Il est clair que α_t^n, $L\alpha_t^n$ et $\|\nabla\alpha_t^n\|^2$ sont continus dans tout L^p. On peut donc leur appliquer les résultats précédents. Il reste alors à montrer que $\zeta_t^n=\int_0^t\alpha_t^n\,d\tilde{W}_i(s)$ et $L\zeta_t^n$ convergent dans tout L^p respectivement vers ζ_t et $\int_0^t L\alpha_t\,d\tilde{W}_i(s)$, et que, de plus, $\|\nabla\zeta_t^n\|^2$ et $\nabla\zeta_t^n\cdot\nabla\alpha_t^n$ sont des suites de Cauchy dans tout L^p.

Pour tout p, il existe une constante C_p telle que:

$$\mathscr{E}\left(\left|\int_0^t (\alpha_s^n - \alpha_s)\, d\tilde{W}_s^i\right|^p\right) \leqslant C_p \mathscr{E}\left(\int_0^t |\alpha_s^n - \alpha_s|^p\, ds\right)$$

et il résulte d'un théorème général sur les opérateurs de convolution sur les groupes abéliens (cf. par exemple P. Malliavin, "Intégration – Probabilités – Analyse de Fourier," Masson, 1980) que, pour (w, ω) fixé:

(1) $\int_0^t |\alpha_s^n|^p\, ds \leqslant \int_0^t |\alpha_s|^p\, ds$,

(2) $\int_0^t |\alpha_s^n - \alpha_s|^p\, ds \to 0$ quand $n \to +\infty$.

On déduit de (1) que: $\int_0^t |\alpha_s^n - \alpha_s|^p\, ds \leqslant 2p \int_0^t |\alpha_s|^p\, ds$.

Le membre de droite de cette inégalité est dans $L^p(\Omega')$ d'après le théorème de Fubini. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que $\mathscr{E}(\int_0^t |\alpha_s^n - \alpha_s|^p\, ds)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui démontre que ζ_t^n tend vers ζ_t dans tout $L^p(\Omega')$.

On démontre, de même, que $L\zeta_t^n$ converge vers $\int_0^t L\alpha_t\, d\tilde{W}_i(s)$ dans tout L^p. En ce qui concerne $\|\nabla\zeta_t^n\|^2$, les estimées 3.3.1.2 et 3.3.1.3 sont toujours valables. Il suffit donc de montrer que:

$$\int_0^T \mathscr{E}(\|\nabla(\alpha_s^n - \alpha_s^m)\|^{4p})\, ds \qquad \text{et} \qquad \int_0^T \mathscr{E}(\|\nabla\alpha_s^n\|^2 - \|\nabla\alpha_s^m\|^2)^{2p}\, ds$$

tendent vers 0 lorsque n et m tendent vers l'infini.

D'après 3.3.1.4:

$$\|\nabla(\alpha_s^n - \alpha_s^m)\|^2 \leqslant \left|\int_0^T [\rho_n(t-u) - \rho_m(t-u)]\, \|\nabla\alpha_u\|\, du\right|^2$$

et il résulte de la démonstration précédente que

$$\mathscr{E}\left(\int_0^T \left|\int_0^T \rho_n(t-u)\, \|\nabla\alpha_u\|\, du - \|\nabla\alpha_t\|\right|^{2p} dt\right) \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

On a donc la première condition de Cauchy cherchée.

Pour obtenir la deuxième, on montre que $\|\nabla\alpha_t^n\|^2$ est une suite convergente dans $L^p(\Omega' \times \mathbb{R}^+)$ en approchant $\nabla\alpha_u \cdot \nabla\alpha_v$ par des fonctions simples qui lui sont inférieures et en démontrant le résultat sur les fonctions simples par un raisonnement analogue au précédent, portant ici sur des intégrales doubles. On conclut comme dans le cas où α, $L\alpha$ et $\|\nabla\alpha\|^2$ sont continus dans tout L^p.

3.3.2. LEMME. *Supposons que* X_t^{n-1} *est dans* κ *et que, de plus*:

$$\|X_t^{n-1}\|_{\kappa_{p,T}} < +\infty, \qquad \forall p.$$

Alors X_t^n *possède la même propriété*:

Preuve. Notons χ l'une quelconque des fonctions C^i, D^i, ou E^i et montrons que $\chi_s = (s, \eta_s, X_s^{n-1}, \xi)$ est dans κ pour tout s, $0 \leqslant s \leqslant T$. D'après le théorème 1.3.5, χ_s est dans κ_1 et:

$$L\chi_s = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 \chi_s}{\partial \eta_i \partial \eta_j} \nabla \eta_s^i \cdot \nabla \eta_s^j + \frac{\partial^2 \chi_s}{\partial x_i \partial x_j} \nabla X_s^i \nabla X_s^j + 2\frac{\partial^2 \chi_s}{\partial \eta_i \partial x_j} \nabla \eta_s^i \nabla X_s^j\right]$$

$$+ \frac{\partial \chi_s}{\partial \eta_i} L\eta_s^i + \frac{\partial \chi_s}{\partial x_i} (LX_s^{n-1})^i,$$

$$\|\nabla \chi_s\|^2 = \left(\frac{\partial \chi_s}{\partial \eta_i}\right)\left(\frac{\partial \chi_s}{\partial \eta_j}\right) \nabla \eta_s^i \cdot \nabla \eta_s^j + \left(\frac{\partial \chi_s}{\partial x_i} \frac{\partial \chi_s}{\partial x_j}\right) (\nabla \chi_s^{n-1})^i \cdot \nabla (X_s^{n-1})^j$$

$$+ \left(\frac{\partial \chi_s}{\partial \eta_i} \frac{\partial \chi_s}{\partial x_j} + \frac{\partial \chi_s}{\partial \eta_j} \cdot \frac{\partial \chi_s}{\partial x_i}\right) \nabla \eta_s^i \cdot \nabla (X_s^{n-1})^j.$$

On en déduit qu'il existe des constantes M et M' telles que:

3.3.2.1

$$\mathscr{E}(\sup_{t \leqslant T} |L\chi_t|^{2p})^{1/2p} \leqslant M \|X_t^{n-1}\|_{\kappa_{p,T}} + M',$$

$$\mathscr{E}(\sup_{t \leqslant T} \|\nabla \chi_t\|^{4p})^{1/2p} \leqslant M \|X_t^{n-1}\|_{\kappa_{p,T}} + M'.$$

De plus:

$$\mathscr{E}(\sup_{t \leqslant T} |\chi_t|^{2p})^{1/2p} < N\mathscr{E}(\sup_{t \leqslant T} (1 + |X_t^{n-1}|^2 + |\xi_t|^2 + |\eta_t|^2)^p)^{1/2p}$$

$$\leqslant N'(1 + \|\eta_t\|_{\kappa_{p,T}} + \|X_t^{n-1}\|_{\kappa_{p,T}} + \|\sup_{t \leqslant T} |\xi_t|\|_{L^{2p}(\Omega, P)}).$$

Or, ξ_0 étant dans L^p, il résulte des estimées classiques sur les solutions d'équations différentielles stochastiques que $\sup_{t \leqslant T} |\xi_t|$ l'est également. On déduit alors des lemmes 1.4.1 et 3.3.1 que X_t^n est dans κ

$$LX_t^n = \int_0^t \left(LC - \frac{C}{2}\right) dw_s + \int_0^t LD\, d\xi_s + \int_0^t LE\, ds.$$

Pour calculer $\nabla X_t^{n,i} \cdot \nabla X_t^{n,j}$, on l'écrit sous la forme:

$$\nabla X_t^{n,i} \cdot X_t^{n,j} = \tfrac{1}{2}[L(X_t^{n,i} X_t^{n,j}) - X_t^{n,i} L X_t^{n,j} - X_t^{n,j} L X_t^{n,i}],$$

$$\begin{aligned} X_t^{n,i} \cdot X_t^{n,j} = X_0^2 &+ \int_0^t [X_s^{n,i} C^j(s, \eta_s, X_s^{n-1}, \xi) + X_s^{n,j} C^i(s, \eta_s, X_s^{n,i}, \xi)]\, dw_s \\ &+ \int_0^t [X_s^{n,i} D^j(s, \eta_s, X_s^{n-1}, \xi) + X_s^{n,j} D^i(s, \eta_s, X_s^{n-1}, \xi)]\, d\xi_s \\ &+ \int_0^t [X_s^{n,i} E^j(s, \eta_s, X_s^{n-1}, \xi) + X_s^{n,j} E^i(s, \eta_s, X_s^{n-1}, \xi) \\ &+ (CC^* + D(BB^*)\, D^*)_{ij}(s, \eta_s, X_s^{n-1}, \xi)]\, ds. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} L(X_t^{n,i} \cdot X_t^{n,j}) = &\int_0^t [L(X_s^{n,i} C^j + X_s^{n,j} C^i) - \tfrac{1}{2}(X_s^{n,i} C^j + X_s^{n,j} C^i)]\, dw_s \\ &+ \int_0^t L(X_s^{n,i} D^j + X_s^{n,j} D^i)\, d\xi_s \\ &+ \int_0^t L[X_s^{n,i} E^j + X_s^{n,j} E^i + (CC^* + D(BB^*)D^*)_{ij}]\, ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_t^{n,i} L X_t^{n,j} = &\int_0^t [X_s^{n,i}(LC^j - \tfrac{1}{2}C^j) + L X_s^{n,j} C^i]\, dw_s \\ &+ \int_0^t [X_s^{n,i} L D^j + L X_s^{n,j} D^i]\, d\xi_s \\ &+ \int_0^t [X_s^{n,i} L E^j + L X_s^{n,j} E^i \\ &+ C^i(LC^j - \tfrac{1}{2}C^j) + (D(BB^*)D^*)_{ij}]\, ds, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla X_t^{n,i} \cdot \nabla X_t^{n,j} = &\int_0^t [\nabla X_s^{n,i} \cdot \nabla C^j + \nabla X_s^{n,j}\, \nabla C^i]\, dw_s \\ &+ \int_0^t [\nabla X_s^{n,i}\, \nabla D^j + \nabla X_s^{n,j}\, \nabla D^i]\, d\xi_s \\ &+ \int_0^t \Big[\nabla X_s^{n,i}\, \nabla E^j + \nabla X_s^{n,j}\, \nabla E^i \\ &+ \sum_k (\nabla C_k^i\, \nabla C_k^j + \nabla (DB)_k^i \cdot \nabla (B^* D^*)_k^j)\Big]\, ds. \end{aligned}$$

Ces équations permettent d'obtenir des majorations de $\|X_t^n\|_{\kappa_p,T}$ indépendantes de n. Il est clair, en utilisant les inégalités 3.3.2.1 quil existe des constantes M'', M''' telles que:

$$\mathscr{E}(\sup_{t\leqslant T} |LX_t^n|^{2p}) \leqslant M'' + M''' \left(\int_0^T \|X_s^{n-1}\|_{\kappa_p}^{2p}\, ds\right),$$

$$\mathscr{E}(\sup_{\substack{t\leqslant T\\ i,j}} \nabla X_t^{n,i}\cdot \nabla X_t^{n,j}) < M''(\mathscr{E}(\sup_{\substack{t\leqslant T\\ i,j}} \nabla X_t^{n,i}\cdot \nabla X_t^{n,j}))^{1/2}$$

$$\times \left[\int_0^T M\|X_s^{n-1}\|_{\kappa_p}^{2p}\, ds + M'\right]^{1/2}$$

$$+ M''' \left[\int_0^T M\|X_s^{n-1}\|_{\kappa_p}^{2p}\, ds + M'\right].$$

Il est classique que l'on peut déduire de la deuxième inégalité une inégalité de la forme

$$\mathscr{E}(\sup_{\substack{t\leqslant T\\ i,j}} \nabla X_t^{n,i}\cdot \nabla X_t^{n,j}) \leqslant N'' + N''' \left(\int_0^T \|X_s^{n-1}\|_{\kappa_p}^{2p}\, ds\right)$$

et par suite:

$$\|X_t^n\|_{\kappa_p,T}^{2p} \leqslant R + R' \left(\int_0^T \|X_s^{n-1}\|_{\kappa_p}^{2p}\, ds\right).$$

On en déduit: $\|X_t^n\|_{\kappa_p,T}^{2p} \leqslant R'' \exp R'T$.

3.3.3. *Fin de la démonstration du théorème* 3.3. Le fait que X_t^n converge vers X_t dans tout L^p est bien connu (cf. [3, p. 130, par. ex.]). On ne développera donc pàs la démonstration. D'après ce qui précède, la suite $\mathscr{O}\!\ell X_t^n$ est bornée dans L^p et admet donc une sous-suite faiblement convergente vers un élément Z_t de L^p. Par un procédé standard utilisant le théorème de Hahn–Banach, on peut construire une suite Y_t^n de combinaisons linéraires des X_t^n convergeant fortement vers X_t et telle que $\mathscr{O}\!\ell Y_t^n$ converge fortement vers Z_t. Alors: $X_t \in \mathscr{D}_p$ et $Z_t = \mathscr{O}\!\ell_p X_t$. On a de même: $\nabla X_t^{n,i}\cdot \nabla X_t^{n,j}$ converge vers $\nabla X_t^i \cdot \nabla X_t^j$ dans tout L^p. Le fait que LX_t et $\nabla X_t^i \cdot \nabla X_t^j$ vérifient des équations stochastiques linéaires s'obtient en passant à la limite dans les relations obtenues précédemment.

3.4. Corollaire. *$Q_t(x, w, \xi)$ est dans κ et, pour tout processus X_t, solution d'une équation différentielle stochastique semblable à celle du* *théorème précédent, $\nabla Q_t^i \cdot \nabla X_t^j$ est solution d'une équation stochastique linéaire nonhomogène dont les coefficients sont des fonctions C^∞ des dérivées premières des fonctions $\tilde{b}_1$, $\tilde{b}_2$, a, C, D, et E. En particulier*

$$\begin{aligned} d(\nabla Q_t^i \cdot \nabla Q_t^j) &= \left[(\nabla Q_t^i \cdot \nabla Q_t^k) \frac{\partial \tilde{b}_1^j}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \tilde{b}_1^i}{\partial \theta_k} (\nabla Q_t^k \cdot \nabla Q_t^j) \right] dw_t \\ &+ \left[(\nabla Q_t^i \cdot \nabla Q_t^k) \frac{\partial \tilde{b}_2^j}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \tilde{b}_2^i}{\partial \theta_k} (\nabla Q_t^k \cdot \nabla Q_t^j) \right] d\xi_t \\ &+ \left[(\nabla Q_t^i \cdot \nabla Q_t^k) \frac{\partial \tilde{a}^j}{\partial \theta_k} + \frac{\partial \tilde{a}^i}{\partial \theta_k} (\nabla Q_t^k \cdot \nabla Q_t^j) + \left(\left(\frac{\partial \tilde{b}_1}{\partial \theta_k} \cdot \frac{\partial \tilde{b}_1^*}{\partial \theta_l} \right)_{ij} \right. \right. \\ &+ \left. \left. \left(\frac{\partial \tilde{b}_2}{\partial \theta_k} BB^* \frac{\partial \tilde{b}_2^*}{\partial \theta_l} \right)_{ij} \right) (\nabla Q_t^k \cdot \nabla Q_t^l) + \frac{1}{2} (\tilde{b}_1 \tilde{b}_1^*)_{ij} \right] dt. \end{aligned}$$

3.5. THÉORÈME. *Soit (θ_t, ξ_t) un processus satisfaisant les hypothèses $(\mathrm{H}_i)_{i=0 \text{à} 2}$ et:*

(H_3) *θ_0 et ξ_0 sont dans L^p pour tout p.*

(H_4) *Les coefficients des matrices a, A, b, B sont de classe $\mathscr{C}^3$ par rapport à la variable θ et sont continues par rapport à l'ensemble des variables ainsi que leurs dérivées successives en θ que l'on suppose de plus bornées. Alors la mesure conditionnelle $P(\theta_t \in dx \mid \mathscr{F}_t^\xi)$ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, presque surement pour la loi de ξ, pour tout t, $0 < t \leqslant T$.*

Preuve. On procède comme au paragraphe 1.5. On note P_t la matrice de coefficients $\nabla Q_t^i \nabla Q_t^j$, $\tilde{P}$ la matrice de ses cofacteurs et Δ son déterminant. Soit φ une fonction de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$, nulle à l'infini.

$$\nabla(\varphi \circ Q_t) \cdot \nabla Q_t^j = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} (\nabla Q_t^i \cdot \nabla Q_t^j).$$

D'où:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} = (\nabla(\varphi \circ Q_t) \cdot \nabla Q_t^j) \tilde{p}_{ji} \Delta^{-1}.$$

D'après le lemme 3.1:

$$E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i} (\theta_t) \,\middle|\, \mathscr{F}^t \right) = \int_{\mathbb{R}^m} I_t^i(x, \xi) \, dF_{t_0}(x)$$

où

3.5.0

$$I_t^i(x,\xi)=\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta_i}(Q_t(x,w,\xi))\,\rho_t(x,w,\xi)\,d\mu_m(w)$$

$$=\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)}(\nabla\tilde{\varphi}_t\cdot\nabla Q_t^j)\,\tilde{p}_{ji}\,\Delta^{-1}\rho_t(x,w,\xi)\,d\mu_m(w)$$

où $\tilde{\varphi}_t=\varphi\circ Q_t(x,w,\xi)$.

D'après le théorème 3.3, $\tilde{\varphi}_t$, Q_t^j, $\tilde{p}_{ji}$ sont dans κ.

3.5.1. Lemme. *ρ_t est dans κ.*

Preuve. ρ_t est solution de l'équation:

$$d\rho_t(x,w,\xi)=\rho_t(x,w,\xi)[A(t,Q_t(x,w,\xi),\xi_t)-\bar{A}(t,\xi)]^*\times[BB^*(t,\xi)]^{-1/2}\,d\xi_s,$$

$$\rho_0(x,w,\xi)=1.$$

A et $(BB^*)^{-1}$ étant bornés, on en déduit que ρ_t est dans L^p pour tout p. Posons $\tilde{\rho}_t=\log\rho_t$. Alors, d'après les théorèmes 3.3 et 3.4, $\tilde{\rho}_t$ est dans κ et $\nabla\tilde{\rho}_t\cdot\nabla Q_t$ vérifie un systeme linéaire nonhomogène dont les coefficients sont des fonctions C^∞ des dérivées premières et secondes de b_1, b_2, A, et B par rapport à θ.

On ne peut pas appliquer directement le théorème 1.3.5 à la fonction composée $\exp\circ\tilde{\rho}_t$ car la fonction exponentielle ne vérifie pas les hypothèses de croissance lente. On définit alors une suite de fonctions $\varphi_n\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

(a) φ_n est de classe $\mathscr{C}^2$,

(b) $\varphi_n(x)=e^x$ pour $x\leqslant n$,

(c) il existe un réel x_n tel que φ_n soit constante sur $[x_n,+\infty[$,

(d) il existe une constante C_0 telle que $|\varphi_n(x)|+|\varphi_n'(x)|+|\varphi_n''(x)|\leqslant C_0e^x$.

On peut construire de telles fonctions en raccordant e^x à des polynômes bien choisis.

Posons: $\rho_t^n=\varphi_n(\tilde{\rho}_t)$. Alors, presque surement, ρ_t^n converge vers ρ_t. D'autre part, d'après la condition (d), ρ_t^n est dominé par $C_0\rho_t$ qui est dans L^p pour tout p. On a donc convergence de ρ_t^n vers ρ_t dans tout L^p. Les fonctions φ_n

satisfont les hypothèses du théorème 1.3.5. On en déduit que ρ_t^n est dans κ_1 et:

$$L\rho_t^n = \varphi_n'(\tilde{\rho}_t)\, L\tilde{\rho}_t + \tfrac{1}{2}\varphi_n''(\tilde{\rho}_t)\, \|\nabla\tilde{\rho}_t\|^2,$$
$$\|\nabla\rho_t^n\|^2 = (\varphi_n'(\tilde{\rho}_t))^2\, \|\nabla\tilde{\rho}_t\|^2.$$

On a, presque surement, les convergences:

$$L\rho_t^n \to \rho_t[L\tilde{\rho}_t + \tfrac{1}{2}\, \|\nabla\tilde{\rho}_t\|^2],$$
$$\|\nabla\rho_t^n\|^2 = \rho_t^2\, \|\nabla\tilde{\rho}_t\|^2.$$

Utilisant de nouveau la condition (d), on en déduit qu'on a convergence dominée donc convergence dans L^p. Le fait que les opérateurs $\mathcal{O}\!\!\iota_p$ soient fermés permet de conclure que ρ_t est dans κ et que:

$$L\rho_t = \rho_t[L\tilde{\rho}_t + \tfrac{1}{2}\, \|\nabla\tilde{\rho}_t\|^2],$$
$$\|\nabla\rho_t\|^2 = \rho_t^2\, \|\nabla\tilde{\rho}_t\|^2.$$

3.5.2. LEMME. *$\Delta_t^{-1} = (\det((\nabla Q_t^i \cdot \nabla Q_t^j)))^{-1}$ est dans κ, pour tout $t > 0$.*

Preuve. On commence par montrer que $1/(\varepsilon + \Delta)$ est dans κ pour tout ε. Soit φ_ε une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les hypothèses de croissance du théorème 1.3.5 et telle que:

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon + x} \qquad \text{pour} \quad x \geqslant 0.$$

Alors d'après le théorème 1.3.5, $\varphi_\varepsilon(\Delta)$ est dans κ_1 puisque Δ est dans κ d'après les théorème 3.3 et 3.4. De plus:

$$\left\|\nabla\left(\frac{1}{\varepsilon + \Delta}\right)\right\|^2 = \frac{1}{(\varepsilon + \Delta)^4}\, \|\nabla(\Delta)\|^2,$$
$$L\left(\frac{1}{\varepsilon + \Delta}\right) = \frac{1}{(\varepsilon + \Delta)^3}\, \|\nabla(\Delta)\|^2 - \frac{L(\Delta)}{(\varepsilon + \Delta)^2}.$$

Montrons que: $\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \|\Delta^{-1}\|_{L^p(\Omega', \nu)} < +\infty$. On procède comme dans [9]. Soit X_t la matrice (m, m) solution de l'équation stochastique

$$dX_t^{ij} = X_t^{ik}\, \frac{\partial\tilde{b}_1^j}{\partial\theta_k}\, dw_t + X_t^{ik}\, \frac{\partial\tilde{b}_2^j}{\partial\theta_k}\, d\xi_t + X_t^{i,k}\, \frac{\partial\tilde{a}^j}{\partial\theta_k}\, dt,$$
$$X_0 = I_m.$$

C'est une matrice inversible dont l'inverse Z_t vérifie l'équation:

$$dZ_t^{ij} = -\frac{\partial \tilde{b}_1^k}{\partial \theta_i} Z_k^j \, dw_t - \frac{\partial \tilde{b}_2^k}{\partial \theta_i} Z_k^j \, d\xi_t - \left(\frac{\partial \tilde{a}^k}{\partial \theta_i} - \frac{\partial \tilde{b}_1^l}{\partial \theta_i} \cdot \frac{\partial \tilde{b}_1^{*k}}{\partial \theta_l} - \frac{\partial \tilde{b}_2^l}{\partial \theta_i} BB^* \frac{\partial \tilde{b}_2^{*k}}{\partial \theta_l} \right) Z_k^j \, dt.$$

On vérifie aisément par la formule d'Ito que:

$$P_t = X_t \left(\int_0^t Z_s \frac{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1^*}{2} Z_s^* \, ds \right) X_t^*.$$

Soit v un vecteur de $\mathbb{R}^m$.

$$(P_t v, v) = \int_0^t \left(\frac{\tilde{b}_1 \tilde{b}_1^*}{2} Z_s^* X_t^* v, Z_s^* X_t^* v \right) ds.$$

On utilise l'hypothèse $(\mathrm{H}_2, \mathrm{b})$

$$(Pv, v) \geqslant \frac{c}{2} \int_0^t \| Z_s^* X_t^* v \|^2 \, ds.$$

On obtient, par des méthodes de majoration déjà utilisées:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \mathscr{E}(\sup_{s,t \leqslant T} \| Z_t^* X_s^* X_s Z_t \|^p) < +\infty.$$

D'où: $\inf_{x \in \mathbb{R}^m} \mathscr{E}(\inf_{s,t \leqslant T} (\inf \text{ spectre } (X_t Z_s Z_s^* X_t^*))^p) > 0$. D'où: $\inf_{x \in \mathbb{R}^m} \mathscr{E}(\inf_{\epsilon' \leqslant t \leqslant T} (\inf \text{ spectre } P_t)^p) > 0$ pour tout $\varepsilon' > 0$. D'où: $\sup_{x \in \mathbb{R}^m} \mathscr{E}(\sup_{\epsilon' \leqslant t \leqslant T} \Delta_t^{-p}) < +\infty$.

Il résulte de ce qui précède que $\| 1/(\varepsilon + \Delta) \|_{\kappa_p}$ est borné indépendamment de ε. Alors le théorème de convergence monotone et le fait que les $\mathscr{O}\!\ell_p$ soient fermés donnent le résultat annoncé. On a ainsi montré que chaque facteur de l'intégrand de $I_t(x, \xi)$ est dans κ. On peut alors effectuer une intégration par parties dans 3.5.0.

$$I_t(x, \xi) = -\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)} \tilde{\varphi}_t [L Q_t^j \tilde{p}_{ji} \Delta^{-1} + (\nabla Q_t^j \cdot \nabla(\tilde{p}_{ji} \Delta^{-1} \rho_t)) \rho_t^{-1}] \rho_t \, d\mu_m .$$

Notons: $\tilde{Q}_t^i = -L Q_t^j \tilde{p}_{ji} \Delta^{-1} - (\nabla Q_t^j \cdot \nabla(\tilde{p}_{ji} \Delta^{-1} \rho_t)) \rho_t^{-1} \cdot E^\xi$ désignera l'intégration sur Ω par rapport à la loi de ξ; ε est un réel positif fixe, inferieur à T. On déduit de ce qui précède l'égalité:

3.3.5

$$E \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}(\theta_t) \,\middle|\, \mathscr{F}_t^\xi \right) = \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)} \tilde{\varphi}_t \rho_t \tilde{Q}_t(x, w, \xi) \, d\mu_m(w) \right) dF_{t_0}(x).$$

D'où:

$$\mathscr{M} = E^{\xi}\left(\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} \sup_{\varphi \in \mathscr{C}_b^1(\mathbb{R}^m)} \left| E\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta_i}(\theta_t) \,\middle|\, \mathscr{F}_t^{\xi}\right)\right| \|\varphi\|_{\infty}^{-1}\right)$$

$$\leqslant E^{\xi}\left(\int_{\mathbb{R}^m} E_m\big(\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} |\rho_t \tilde{Q}_t(x, w, \xi)|\big)\, dF_{\xi_0}(x)\right).$$

Notons P^{ξ_0} la loi de ξ_0 et ξ^y les trajectoires du processus ξ issues de y.

$$\mathscr{M} \leqslant \int_{\mathbb{R}^p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} E^{\xi^y} E_m\big(\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} |\rho_t \tilde{Q}_t(x, w, \xi^y)|\big)\, dF_{\xi_0}(x)\,|_{\xi_0 = y}\right) P^{\xi_0}(dy).$$

Étudions la dépendance par rapport à x et y de $E^{\xi^y} E_m(\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} |\rho_t \tilde{Q}_t(x, w, \xi^y)|)$. $\rho_t(x, w, \xi^y)$, $Q_t(x, w, \xi^y)$, $LQ_t(x, w, \xi^y)$, $\nabla Q_t \cdot \nabla(\tilde{p}_{ji} \Delta^{-1})\,(x, w, \xi^y)$ et $\nabla Q_t \cdot \nabla \rho_t \cdot \rho_t^{-1}(x, w, \xi^y)$ sont solutions d'équations différentielles stochastiques qui ont été explicitées précédemment. Il est aisé de voir, en utilisant les estimées classiques sur les solutions d'équations différentielles stochastiques que, pour tout p, il existe des constantes C_1^p, C_2^p, C_3^p telles que $C_1^p |x|^p + C_2^p |y|^p + C_3^p$ majore la norme L^p de la borne supérieure sur $\varepsilon \leqslant t \leqslant T$ des valeurs absolues des quantités citées plus haut. On en déduit qu'il existe des entiers r et s, et des constantes K_1, K_2, K_3 telles que: $E^{\xi^y} E_m(\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} |\rho_t \tilde{Q}_t(x, w, \xi^y)|) \leqslant K_1 |x|^r + K_2 |y|^s + K_3$. Alors:

$$\mathscr{M} \leqslant K_1 E(|\theta_0|^r) + K_2 E(|\xi_0|^s) + K_3 < +\infty$$

puisque, par hypothèse, θ_0 et ξ_0 sont dans $L^p(\Omega, P)$ pour tout p. Il reste à appliquer le lemme 1.1 pour conclure que, pour tout $\varepsilon > 0$, presque surement pour la loi de ξ, la mesure conditionnelle admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue et ceci pour $t, \varepsilon \leqslant t \leqslant T$. Soit ε_n une suite de réels positifs convergeant vers 0 et soit E_n le sous-ensemble de Ω, de mesure nulle pour la loi de ξ, en dehors duquel la loi conditionnelle est absolument continue, pour tout t vérifiant $\varepsilon_n < t < T$. Alors, si $E = \bigcup_n E_n$, la loi conditionnelle est absolument continue en dehors de E, qui est de mesure nulle, pour tout $t > 0$.

3.6. THÉORÈME. *Soit* (θ_t, ξ_t) *un processus satisfaisant les hypothèses du théorème* 3.5. *On suppose de plus que les fonctions* a, A, b, B *sont de classe* $\mathscr{C}^{k+m+3}$ *par rapport à la variable* θ *et qu'elles sont continues par rapport à l'ensemble des variables ainsi que leurs dérivées successives que l'on suppose de plus bornées. Alors la densité* f_t^{ξ} *de la mesure conditionnelle par rapport à la mesure de Lebesgue est de classe* $\mathscr{C}^k$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, $\sup_{\varepsilon \leqslant t \leqslant T} \|f_t^{\xi}\|_{\mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^m)} < +\infty$.

Preuve.

$$E\left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial\theta_{i_1}\cdots\partial\theta_{i_n}}(\theta_t)\,\middle|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)}\left(\frac{\partial^{n-1}\varphi}{\partial\theta_{i_1}\cdots\partial\theta_{i_{n-1}}}\circ Q_t\right)\rho_t\tilde{Q}_t^{i_n}(x,w,\xi)\,d\mu_m(w)\right)dF_{\xi_0}(x).$$

Pour effectuer une nouvelle intégration par parties, il faut que $\tilde{Q}_t^{i_n}(\theta_0, w, \xi)$ soit dans κ. Or $\tilde{Q}_t^{i_n}(\theta_0, w, \xi)$ a une différentielle stochastique qui fait intervenir les dérivées secondes des fonctions a, A, b, B. Donc pour pouvoir appliquer le théorème 3.3, il faut supposer que ces dérivées secondes snt de classe $\mathscr{C}^2$.
On a alors:

$$E\left(\frac{\partial^n\varphi}{\partial\theta_{i_1}\cdots\partial\theta_{i_n}}(\theta_t)\,\middle|\,\mathscr{F}_t^\xi\right)$$
$$=\int_{\mathbb{R}^m}\left(\int_{\mathscr{C}_0(\mathbb{R}^m)}\left(\frac{\partial^{n-2}\varphi}{\partial\theta_{i_1}\cdots\partial\theta_{i_{n-2}}}\circ Q_t\right)\rho_t\tilde{\tilde{Q}}_t^{i_{n-1},i_n}(x,w,\xi)\,d\mu_m(w)\right)dF_{\xi_0}(x),$$

où

$$\tilde{\tilde{Q}}_t^{i_{n-1},i_n}(x,w,\xi)$$
$$=LQ_t^j\,\tilde{p}_{ji_{n-1}}\tilde{Q}_t^{i_n}\Delta^{-1}+(\nabla Q_t^j\cdot\nabla(\tilde{p}_{ji_{n-1}}\tilde{Q}_t^{i_n}\Delta^{-1}\rho_t))\,\rho_t^{-1}.$$

D'après le théorème 3.4, $\tilde{\tilde{Q}}_t$ fait intervenir les dérivées des coefficients jusqu'à l'ordre 3. On augmente ainsi d'une unité à chaque étape, ce qui démontre la première partie du théorème. Pour démontrer la seconde, on établit, comme dans la démonstration du théorème précedent, l'inégalité suivante:

$$E\Big(\sup_{\varphi\in\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^m)}\ \sup_{\epsilon\leqslant t\leqslant T}|E(D^\alpha\varphi(\theta_t)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)|\,\|\varphi\|_\infty^{-1}\Big)<+\infty,\quad\forall\alpha,\ |\alpha|\leqslant k+m+1,$$

d'où il résulte, que pour presque tout ξ, il existe des constantes $C_{i,\xi}$ telles que:

$$\sup_{\epsilon\leqslant t\leqslant T}|E(D^\alpha\varphi(\theta_t)\,|\,\mathscr{F}_t^\xi)|\leqslant C_{i,\xi}\|\varphi\|_\infty,\qquad\forall\varphi\in\mathscr{C}_b^\infty(\mathbb{R}^m),\quad|\alpha|\leqslant i.$$

On déduit alors du lemme 1.1 que:

$$\sup_{\epsilon\leqslant t\leqslant T}\|f_t^\xi\|_{\mathscr{C}_b^k(\mathbb{R}^m)}<A(1,k+2)\sup_{i\leqslant k+m+1}C_{i,\xi}.$$

REFERENCES

1. N. IKEDA ET S. WATANABE, Stochastic differential equations and diffusion processes, a paraître.
2. KRYLOV ET ROZOVSKII, On conditional distributions of diffusion processes, *Math. USSR-Izv.* **12**, No. 2 (1978), 336.
3. R. S. LIPTSER AND A. N. SHIRYAYEV, "Statistics of Random Processes," Applications of Mathematics No. 5, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York.
4. H. P. MAC KEAN, "Stochastic Integrals," Academic Press, New York.
5. P. MALLIAVIN, Stochastic calculus of variation and hypoelliptic operators, *in* "Proceedings International Symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto, 1976," Tokyo, 1978.
6. P. MALLIAVIN, C^k-hypoellipticity with degeneracy, Parts 1, 2, *in* "Stochastic Analysis" (A. Friedman and M. Pinsky, Eds.), Academic Press, New York, 1978.
7. P. MALLIAVIN, Régularité de lois conditionnelles et calcul des variations stochastique, *C. R. Acad. Sci. Ser. A* **289** (1979), 357.
8. E. PARDOUX, Thèse, Paris Sud-Orsay, 1975.
9. D. STROOCK, The Malliavin calculus and its applications to second order parabolic equations, preprint, 1979.
10. E. PARDOUX, Stochastic partial differential equations and filtering of diffusion processes, *Stochastics* **3** (1979), 127–167.
11. E. PARDOUX, Equations du filtrage non linéaire, de la prédiction et du lissage, preprint de l'université de Provence.